

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 64/38
24 Luglio 1964.

R. Scrimaglio e G. Verri: CALCOLO DELLA RELAZIONE
RANGE-ENERGIA PER MESONI μ FINO A 10^8 MeV.

(Nota interna: n. 253)

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Nota interna: n° 253
24 Luglio 1964

R. Scrimaglio e G. Verri: CALCOLO DELLA RELAZIONE RANGE-ENERGIA
PER MESONI μ FINO A 10^8 MeV.

1. INTRODUZIONE.

Lo scopo di questo lavoro è di calcolare la relazione range-energia per mesoni μ di energia fino a 10^5 GeV attraverso la materia.

In questo lavoro vengono discussi in relazione con le teorie più recenti ed esposti con maggiori dettagli e particolari di calcolo i risultati pubblicati più brevemente in un lavoro in collaborazione con Castagnoli et al. Questi risultati hanno riscontro sperimentale nelle ricerche effettuate dal gruppo dei raggi cosmici di Torino sotto la galleria del Monte Bianco.

In fondo alla nota si presenta inoltre una tabella di fattori correttivi che permette, sulla base dei risultati ottenuti in un caso specifico, di ricavare per i valori di Z (e quindi di Z^2/A) che interessano le grandezze corrispondenti a quelle qui ottenute per il caso $Z = 13$.

La relazione range-energia è espressa dalla formula:

$$R(E) = \int_0^{10^3} \frac{1}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot}} dE + \int_{10^3}^E \frac{1}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot}} dE \quad (g+ / cm^2)$$

ove la $(dE/dx)_{tot}$ rappresenta la perdita totale di energia per unità di percorso.

Tale perdita è la somma di quattro termini indipendenti, corrispondenti ai diversi processi più importanti (irraggiamento, ionizzazione, crea-

2.

zione di coppie, interazioni nucleari) cui da luogo il passaggio dei mesoni attraverso la materia

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion.} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{br.} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{coppie} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{nucl.}$$

Ciascuno di questi contributi viene trattato separatamente nei successivi paragrafi.

Per poter correttamente interpretare i dati sperimentali ottenuti recentemente, i calcoli sono stati eseguiti per i due diversi valori del numero atomico del mezzo attraversato ($Z = 12$ Magnesio, $Z = 13$ Alluminio) più vicini al valore dei costituenti le rocce del Monte Bianco.

L'integrale che fornisce la $R(E)$ è stato diviso in due parti in quanto fino al valore di 10^3 MeV la $R(E)$ è già nota essendo stata calcolata da Sternheimer⁽³⁾.

Pertanto la precedente formula si può scrivere:

$$R(E) = 545 + \int_{10^3}^E \frac{1}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot}} dE \quad (g/cm^2)$$

Alle basse energie il fenomeno prevalente è quello della ionizzazione, nel quale la dipendenza di R dal mezzo va come Z/A .

Per questo motivo il valore del primo integrale (545 gr/cm^2) è lo stesso sia per $Z = 12$ che per $Z = 13$.

2. IONIZZAZIONE.

Questo contributo è stato calcolato con la formula di Bethe-Livingston⁽²⁾.

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion.} = 7.46 \times 10^{-2} \left\{ \ln \left[\frac{2mc^2 T}{I^2} \left(\frac{E}{\mu c^2 \beta} \right)^2 - 2\beta^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{T}{E + \mu c^2} \right)^2 - \delta \right] \right\}$$

T è la massima energia trasferibile e vale

$$T = 2mc^2 \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \quad \text{per } E \leq 5 \times 10^3$$

$$T = 2mc^2 \frac{E^2}{\mu^2 c^4 + 2mc^2 E^{1/2}} \quad \text{per } 5 \times 10^3 < E \leq 5 \times 10^5$$

$$T \approx pc = E$$

$$\text{per } E > 5 \times 10^5$$

con $\beta = \sqrt{\frac{E^2 - \mu^2 c^4}{E^2}}$; μ = massa del mesone; m = massa dell'elettrone

Il termine δ contenuto nella formula è stato introdotto per tenere conto dello effetto Fermi di polarizzazione del mezzo. Per questo effetto noi abbiamo seguito la trattazione di Sternheimer⁽³⁾, invece di quella originale di Fermi, in quanto tiene conto del contributo degli elettroni dei vari shells. Si ha quindi

$$\delta = 4.606 X + c + a(x_1 - x)^m \quad \text{per } x_0 < x \leq x_1$$

$$\delta = 4.606 X + c \quad \text{per } x > x_1$$

con

$$X = \log_{10} \frac{p}{\mu c} = \log_{10} \frac{\beta E}{\mu c^2}$$

	I (MeV)	c	a	m	x_0	x_1
(z = 13)	1.66×10^{-4}	-4.25	0.11	3.34	0.05	3
(z = 12)	1.56×10^{-4}	-4.54	0.0938	3.56	0.1	3

Recentemente Zhdanov et al.⁽⁴⁾ hanno messo in evidenza un nuovo effetto, detto di soppressione, che introduce un ulteriore termine sottrattivo nella precedente espressione della $(dE/dx)_{\text{ion}}$.

Tale termine si deduce dalla trattazione perturbativa della collisione, quando si considerano anche i termini del secondo ordine (correzione radiativa), ed il suo ordine di grandezza è comparabile con quello dell'incremento relativistico.

Questa correzione Δ dipende dal rapporto $E/\mu c^2$ e tende ad un valore asintotico di saturazione per $E/\mu c^2 \rightarrow \infty$, dato da

$$\Delta_{\infty} = 2 \ln^2 \zeta$$

$$\zeta = \frac{4\pi e^2}{\hbar c m} \frac{Ne^2}{\langle w_s \rangle} \ln \frac{c}{\langle v \rangle}$$

4.

con

N = densità degli elettroni nel mezzo
 $\langle \omega_s \rangle$ = frequenza effettiva e^-
 $\langle v \rangle$ = velocità media e^-

Per mesoni μ in un mezzo con $\rho = 2,6 \text{ gr/cm}^3$ e $Z = 12$ o $Z = 13$ il valore asintotico viene praticamente raggiunto ad energie dell'ordine di 10^4 MeV e la correzione percentuale è rispettivamente del 10% e del 13%.

Zhdanov ha rilevato sperimentalmente l'effetto in emulsione ed è risultato di questo ordine di grandezza.

Abbiamo effettuato i calcoli con e senza questo termine, data la non ancora completa evidenza sperimentale^(5, 6). I risultati sono rappresentati nelle fig. 1 e 2, rispettivamente per $Z = 12$ e $Z = 13$.

3. BREMSSTRAHLUNG.

Per calcolare la perdita di energia per irraggiamento $(dE/dx)_{\text{brem.}}$ si è presa come base la teoria di Cristy-Kusaka⁽⁷⁾, tenendo però conto dello effetto di schermo degli elettroni atomici quando si considerano energie elevate ($> 10^4 \text{ MeV}$).

Il parametro δ che regola l'influenza di questo effetto vale

$$\delta = 100 \frac{\mu c^2}{E} \frac{E}{E - E'} Z^{-\frac{1}{3}}$$

dove E ed E' sono rispettivamente le energie del μ incidente e del γ emesso. Dalla precedente formula risulta che quando $\delta \gg 1$ si ha schermatura completa e per la sezione d'urto si ha

$$d\sigma = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_e^2 \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \ln \left[\frac{m}{\mu} 183 Z^{-\frac{1}{3}} \right] \frac{1}{v} dv \quad (v = \frac{E'}{E})$$

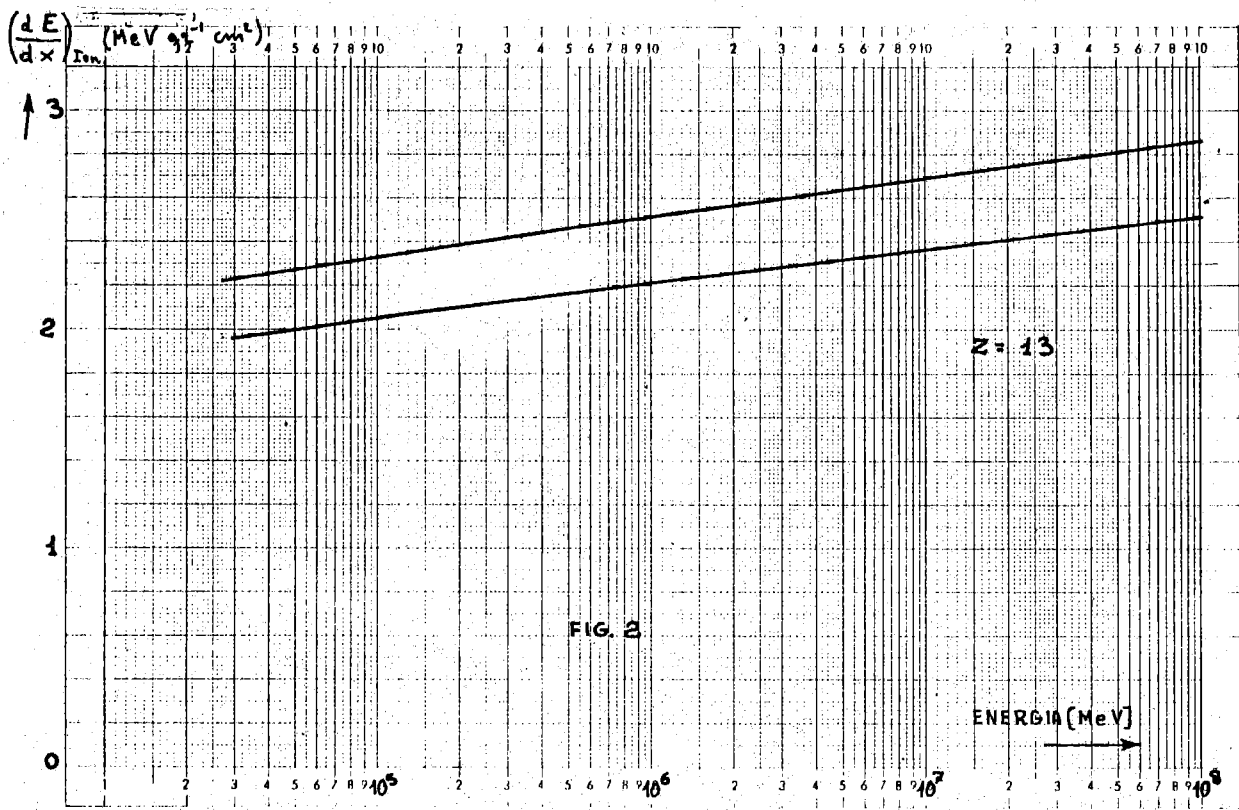
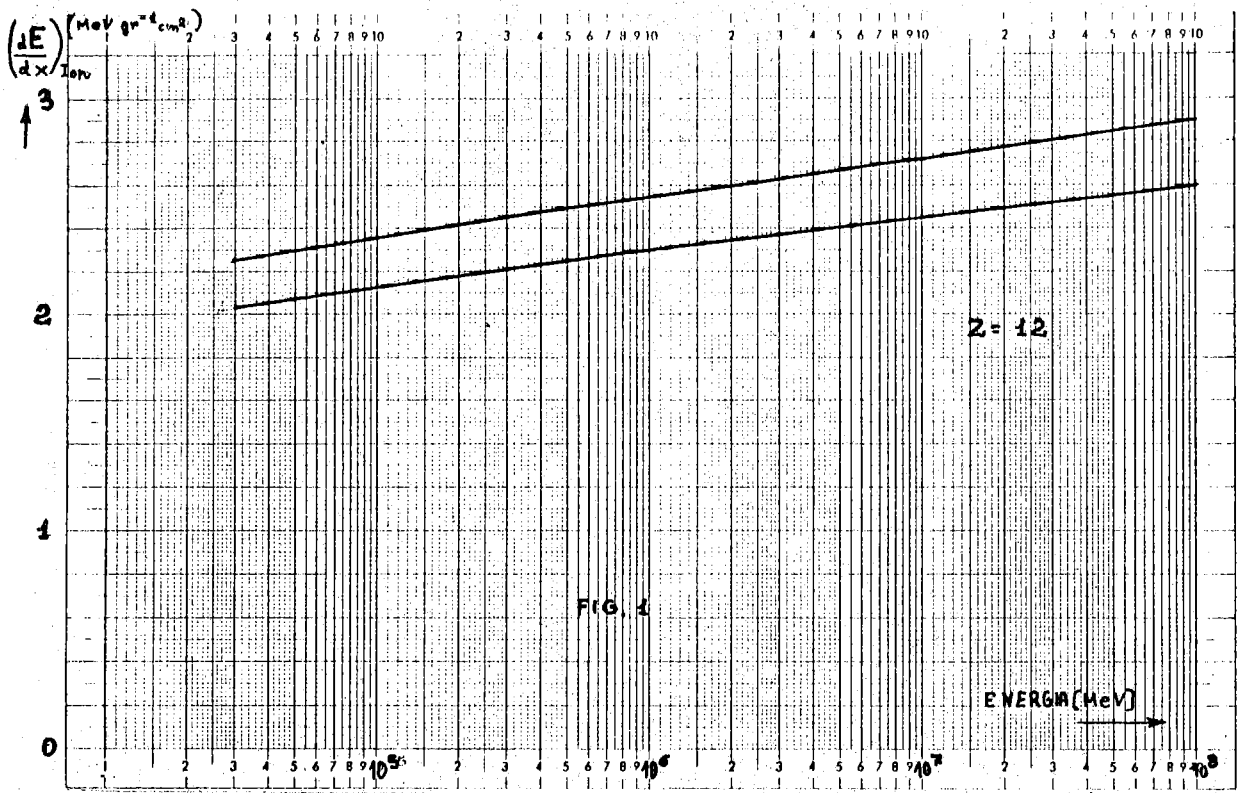
Viceversa quando $\delta \ll 1$ siano nel caso opposto e la sezione d'urto è

$$d\sigma = \frac{16}{3} \alpha \frac{N}{A} Z^2 r_e^2 \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \left(\frac{3}{4} v + \frac{1-v}{v}\right) \left[\ln \left(\frac{12}{5} \frac{1-v}{v} \frac{E}{\mu c^2} Z^{-\frac{1}{3}} \right) - 0,5 \right]$$

La condizione $\delta \gg 1$ equivale in pratica a considerare $E \gg 10^4 Z^{-1/3}$ e la condizione $\delta \ll 1$ equivale a $E \ll 10^4 Z^{-1/3}$.

In pratica si nota che le due espressioni si raccordano abbastanza bene per valori di E intorno a $2,5 \times 10^5 \text{ MeV}$.

Passando dalle sezioni d'urto differenziali alle perdite di energia ed



6.

assegnando alle costanti i loro valori si ha

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{br} = \left. \begin{array}{l} z=12 \quad 1.59 \times 10^{-7} \\ z=13 \quad 1.72 \times 10^{-7} \end{array} \right\} E \left[\ln \frac{E}{\mu c^2} - \begin{array}{l} z=12 \quad 0.48 \\ z=13 \quad 0.46 \end{array} \right]$$

per $E \leq 2.5 \times 10^5 \text{ MeV}$

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{br} = \begin{array}{l} z=12 \quad 1.84 \times 10^{-6} E \\ z=13 \quad 1.98 \times 10^{-6} E \end{array}$$

per $E \geq 2.5 \times 10^5 \text{ MeV}$

4. CREAZIONE DI COPPIE.

Le teorie comunemente usate nel calcolo della perdita di energia per creazione di coppie da μ sono quelle di Bhabba⁽⁸⁾ (modificata da Block, King e Ueda⁽⁹⁾) e di Racah⁽¹⁰⁾.

Più recentemente Murota, Ueda e Tanaka⁽¹¹⁾ hanno elaborato una teoria basata sulla elettrodinamica quantistica, più soddisfacente rispetto alle precedenti. La particella incidente carica viene trattata secondo la dinamica quantistica e la particella carica che funziona da targhetta come un campo di Coulomb fisso: si ottengono così delle valutazioni più accurate di quelle di Bhabba e Racah. Questi ultimi infatti hanno svolto la loro trattazione considerando la particella incidente da un punto di vista classico, muoventesi in linea retta con velocità costante, cui viene associato un campo classico.

La formula base è dunque la (26 [11]) del lavoro di Murota-Ueda-Tanaka, che fornisce la sezione d'urto differenziale del processo; si possono però introdurre delle semplificazioni che risultano comode agli effetti del calcolo e per un eventuale confronto con i dati sperimentali, poichè in questo modo si ottiene una suddivisione in più zone di transfer di energia. Indicando con E l'energia del mesone μ , con $\xi = \xi^+ + \xi^-$ l'energia totale della coppia ed introducendo i rapporti

$$\xi/E = u$$

$$\frac{\xi^+ - \xi^-}{\xi} = v$$

si hanno per $u \ll m/\mu$ piccoli transfer di energia, per $u \gg m/\mu$ grandi transfer di energia.

Quando si ha grande trasferimento di energia, questa si distribuisce tra le due particelle simmetricamente o no a seconda che sia $x \gg 1$ o $x \ll 1$ ove x è dato dall'espressione

$$x = R^2 \frac{1-v^2}{1-u} \quad \text{con } R = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}}{E} \frac{\mu}{m}$$

Pertanto il termine $(dE/dx)_{\text{coppie}}$ consta di sei termini, in relazione ai valori di \mathcal{E} e v , ed in dipendenza da E , cioè dal considerare o meno l'effetto di schermo degli elettroni.

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{coppie}} = A a_i + B b_i + C c_i \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ \text{in relazione a} \\ z = 12 \text{ e } z = 13 \end{array}$$

con

$$A = \iint \Gamma_A \left\{ \left[(2+v^2) + (3+v^2)x \right] \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - (3+v^2) + \frac{1-v^2}{1+x} \right\} d\mathcal{E} dv$$

$$\Gamma_A = \begin{cases} \ln \frac{2R(1-v^2)}{8(1-x)^{1/2}} & \text{per } 10^3 \leq E < 10^4 \\ 4.1 & \text{per } 10^4 < E \leq 10^8 \end{cases}$$

$$a_1 = 3.25 \times 10^{-6} \quad a_2 = 3.53 \times 10^{-6} \quad \begin{array}{l} 20mc^2 \leq \mathcal{E} \leq 0.1E \\ -1 + \frac{20mc^2}{E} \leq v \leq 1 - \frac{20mc^2}{E} \end{array}$$

$$B = \iint \Gamma_B \frac{1-\mathcal{E}}{R^2(1-v^2)} \left\{ (3-v^2) \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\mathcal{E}}{E} \right)^2 \right] - 3 \frac{\mathcal{E}}{E} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}}{E} \right)^2 (1+v^2) \right\} d\mathcal{E} dv$$

$$\Gamma_B = \begin{cases} \ln \left[\mathcal{E} \frac{(1-v^2)}{M} \right] & \text{per } 10^3 \leq E < 10^6 \\ \ln \left[59 \frac{M}{mc^2} \right] & \text{per } 10^6 \leq E \leq 10^8 \end{cases}$$

$$M^2 = (mc^2)^2 + \left[\frac{\mathcal{E}^2(1-v^2)}{4\mathcal{E}(E-\mathcal{E})} \right]^2 \quad \begin{array}{l} 0.1E \leq \mathcal{E} \leq 0.95E \\ -0.2 \leq v \leq 0.2 \end{array}$$

$$b_1 = 1.52 \times 10^{-6} \quad b_2 = 1.76 \times 10^{-6}$$

8.

$$C = \iint \Gamma_C \left\{ \left[1 - \frac{\epsilon}{E} + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{E} \right)^2 \right] / \left(1 + \frac{v^2}{2} \right) \ln \left(\frac{1 - \frac{\epsilon}{E}}{R^2 (1 - v^2)} \right) - \right. \\ \left. - (1 + v^2) \left(1 - \frac{\epsilon}{E} \right) - \frac{1}{4} (3 + v^2) \left(\frac{\epsilon}{E} \right)^2 \right\} d\epsilon dv$$

$$\Gamma_C \equiv \Gamma_B$$

$$0.7 E \leq \epsilon \leq 0.95 E$$

$$0.85 \leq v \leq 0.99$$

$$C_1 = 3.23 \times 10^{-6}$$

$$C_2 = 3.53 \times 10^{-6}$$

Il contributo principale è dato dagli integrali A, mentre gli integrali B e C contribuiscono in maniera apprezzabile solo a partire da energie $>$ di 10^5 MeV con un peso dell'ordine del 7÷8%.

L'andamento della $(dE/dx)_{\text{coppie}}$ in funzione di E è riportato in figura 3 per il caso Z = 12.

Dall'andamento delle curve si può dedurre una espressione semplice valida ad energie superiori a 10^2 GeV, cioè

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{coppie}} = K \times 10^{-6} E$$

$$\text{con } K = 1.1 \quad \text{per } Z = 13 \\ K = 0.99 \quad \text{per } Z = 12$$

5. INTERAZIONI NUCLEARI.

Per quanto riguarda la perdita di energia per interazione nucleare dei mesoni μ , fra le trattazioni che danno i valori della $(dE/dx)_n$. Si hanno discrepanze che arrivano anche ad un fattore 25. Questo dipende essenzialmente da due ragioni:

- incertezze sulla formulazione teorica dello spettro dei fotoni virtuali che accompagnano il μ ;
- scarsità di misure sperimentali sulla σ_γ dei fotoni reali.

La teoria comunemente usata per la trattazione del fenomeno è quella di Weicsäcker-Williams⁽¹²⁾, basata su un metodo semiclassico, che si può applicare ad un muone di massa μ ed energia totale E, sotto le condizioni

$$(1) \quad \frac{E}{\mu c^2} \gg 1 \quad e \quad q = h\nu \ll E$$

cioè che il muone sia relativistico e l'energia ceduta, cioè l'energia del quanto virtuale interessato al processo sia piccola rispetto alla energia totale del μ . Lo spettro dei fotoni virtuali, per un μ di energia E, che si ottiene secondo questa teoria è

$$(2) \quad N(E, q) = \frac{2\alpha}{\pi} \left[\ln \frac{E}{q} - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{q}$$

e la sezione d'urto differenziale del processo è allora

$$(3) \quad d\sigma(E, q) = \frac{2\alpha}{\pi} \left[\ln \frac{E}{q} - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{q} \sigma_{\gamma}(q) dq$$

È possibile usare qui la σ_{γ} relativa ad un quanto reale, poichè il contributo del campo fotonico scalare e longitudinale allo spettro dei fotoni virtuali è trascurabile in confronto a quello del campo trasversale e perciò i quanti virtuali sono facilmente assimilabili a quanti reali.

Kessler-Kessler hanno ripreso, in tempi recenti⁽¹³⁾ in considerazione il fenomeno ed hanno svolto un calcolo basato sulla teoria dei campi. Le conclusioni a cui giungono sotto le condizioni (1) sono le medesime di Weicsäcker-Williams; quando però si tenga conto anche dei grandi trasferimenti di energia, cioè per $q \simeq E$, l'espressione per lo spettro dei fotoni virtuali viene ad essere modificata, ed assume la forma:

$$(4) \quad N(E, q) = \frac{2\alpha}{\pi} \left[\frac{2E^2 - 2Eq + q^2}{2E^2} \ln \frac{(E-q)}{\mu c^2} - \frac{E-q}{2E} \right] \frac{1}{q}$$

e la sezione d'urto

$$(5) \quad \sigma(E, q) dq = \frac{2\alpha}{\pi} \left[\frac{2E^2 - 2Eq + q^2}{2E^2} \ln \frac{(E-q)}{\mu c^2} - \frac{E-q}{2E} \right] \frac{1}{q} \sigma_{\gamma}(q) dq$$

Per ottenere la $(dE/dx)_n$ è sufficiente moltiplicare la (3) o la (5) per q ed integrare su tutto l'intervallo di variabilità della q . In molti lavori si usa per questo calcolo la (3), estrapolandola fino a valori di q prossimi ad E , e si assume inoltre per la σ_{γ} un valore costante, indipendente cioè dalla energia del γ . Recenti misure mostrano, però, per la σ_{γ} una dipendenza evidente da E_{γ} per energie almeno fino all'ordine del GeV. Pertanto, in questo calcolo, ci è parso più corretto usare per la σ_{γ} , il valore sperimentale da fotostelle in emulsione, misurato da Castagnoli et al.⁽¹⁴⁾ servendosi del fascio di Bremsstrahlung dell'elettrosincrotrone di Frascati. Le informazioni sulla σ_{γ} potranno ancora essere migliorate quando si potranno fare ulteriori misure con la stessa tecnica, ma ad energie maggiori (per es. coll'elettrosincrotrone da 6 GeV di Amburgo). Il valore da noi usato è dunque

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_{\gamma} &= 3.40 \times 10^{-31} E_{\gamma} && \text{per } E_{\gamma} \leq 1.1 \times 10^3 \text{ MeV} \\ \sigma_{\gamma} &= 3.75 \times 10^{-28} E_{\gamma} && \text{per } E_{\gamma} > 1.1 \times 10^3 \text{ MeV} \end{aligned}$$

(cm²/nucleone)

10.

Utilizzando, quindi, lo spettro dei fotoni virtuali (4) di K-K, che costituisce un indubbio miglioramento in sede teorica, ed i valori (6) per la σ_γ , abbiamo ottenuto per la perdita d'energia per interazione nucleare:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dx}\right)_n^{K-K} = & 1.04 \times 10^{-5} \left\{ \varepsilon^2 \left[\frac{7}{24} \ln \varepsilon - \frac{115}{288} \right] - \frac{\varepsilon \varepsilon'}{2} [\ln \varepsilon' - 1] + \right. \\ & + \frac{\varepsilon'^2}{4} [\ln \varepsilon' - \frac{1}{2}] - \frac{\varepsilon'^3}{6\varepsilon} [\ln \varepsilon' - \frac{1}{3}] + \frac{\varepsilon'^4}{8\varepsilon^2} [\ln \varepsilon' - \frac{1}{4}] - \\ & - 27.3 + \frac{1}{\varepsilon} 1.64 \times 10^{-1} \left. \right\} + 1.09 \times 10^{-4} \left\{ \varepsilon \left[\frac{1}{2} \ln \varepsilon' - 1 \right] + \right. \\ & + \frac{\varepsilon'^2}{4\varepsilon} + \frac{\varepsilon'^3}{6\varepsilon^2} [\ln \varepsilon' - \frac{1}{3}] \left. \right\} \end{aligned}$$

in cui

$$\varepsilon = \frac{E}{\mu c^2} \quad (E \text{ in MeV})$$

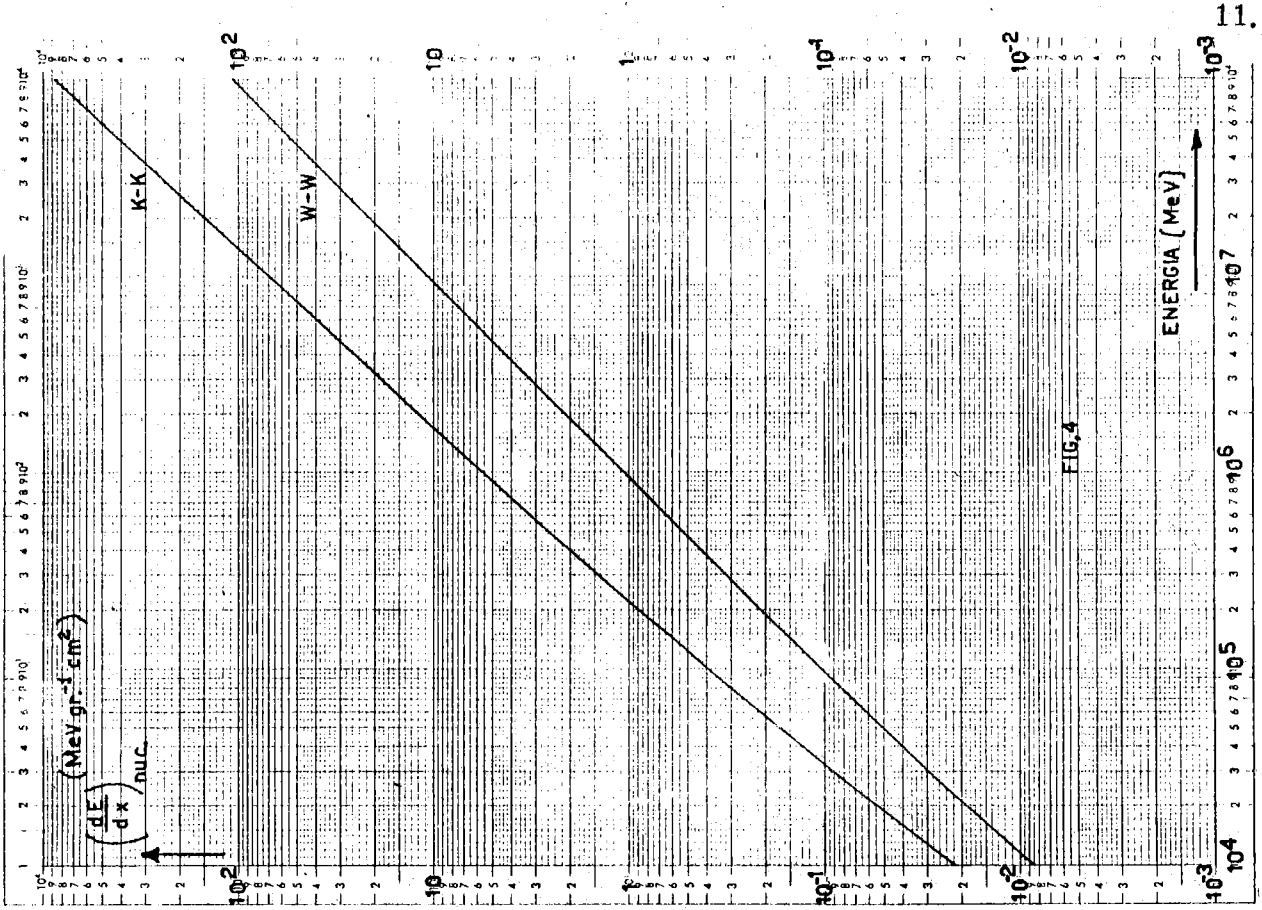
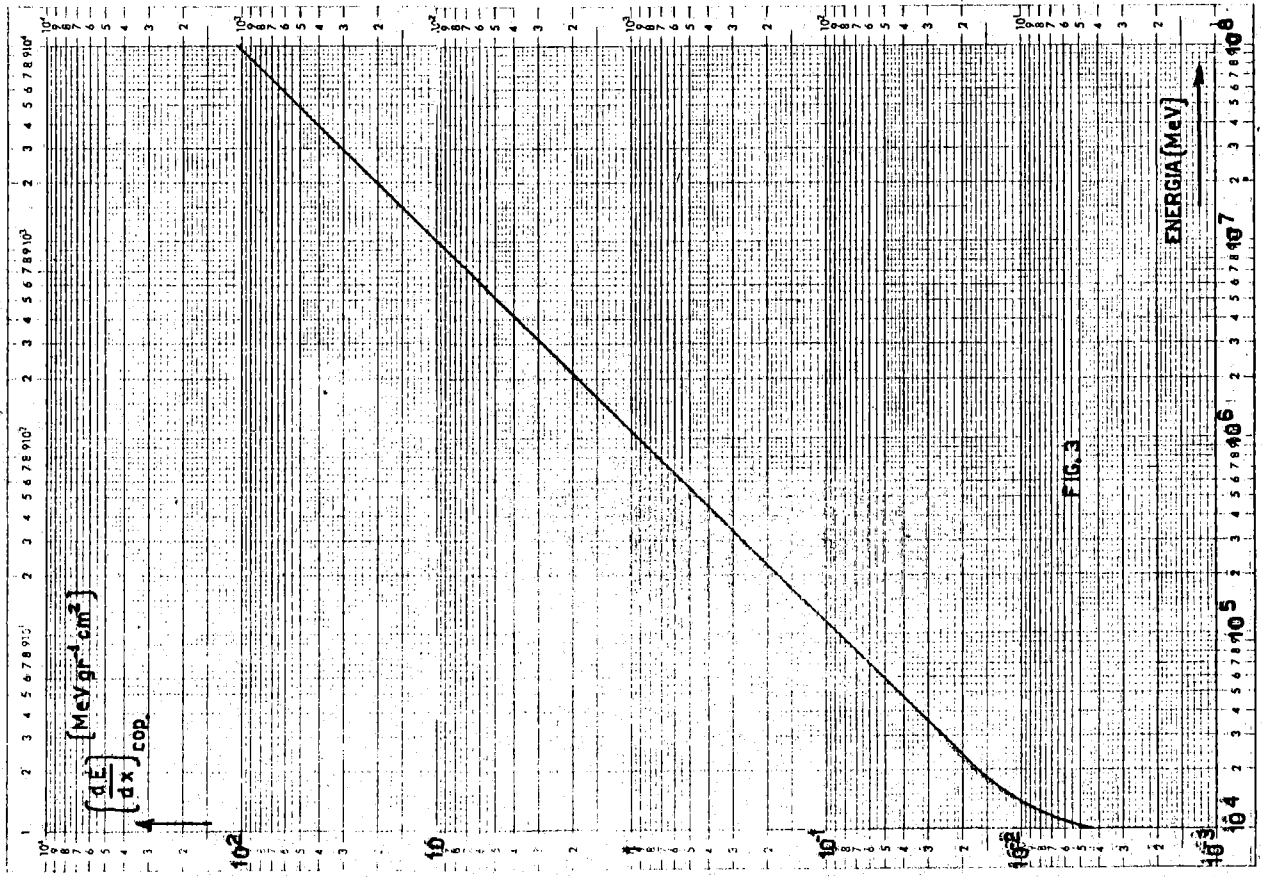
$$\varepsilon' = \frac{(E - 1.1 \times 10^{-3})}{\mu c^2}$$

I valori ottenuti in funzione di E, sono stati riportati in grafico nella fig. 4, e danno la curva (1).

Se si prendono, però, in considerazione i lavori sperimentali sulla interazione nucleare dei μ si vede come alcuni si accordino con la formulazione teorica di K-K⁽¹⁵⁾, ed altri con quella di W-W⁽¹⁶⁾. Pertanto nella stessa figura abbiamo riportato anche la curva (2) ottenuta utilizzando lo spettro dei fotoni virtuali di W-W e la σ_γ precedente; entrambe le curve per $E > 10^2$ GeV possono essere rappresentate da espressioni semplificate al tipo

$$(8) \quad \left(\frac{dE}{dx}\right)_n^{K-K} = 1.05 \times 10^{-6} E \left(\ln \frac{E}{\mu c^2} - 1.21 \right) \quad \text{MeV g}^{-1} \text{cm}^2$$

$$(9) \quad \left(\frac{dE}{dx}\right)_n^{W-W} = 1.05 \times 10^{-6} E$$



6. PERDITA DI ENERGIA TOTALE E RELAZIONE R-E.

La perdita di energia totale si ottiene sommando i quattro contributi che sono stati calcolati separatamente.

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion.} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{br.} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{nucl.} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{sp.}$$

In fig. 5, si riportano le curve della perdita di energia totale. La curva (1) è stata ottenuta prendendo per la $(dE/dx)_N$ la formula (8) del paragrafo precedente, mentre la curva (2) è stata ottenuta con la formula (9).

La relazione range-Energia viene calcolata tramite l'espressione

$$R(E) = \int_{10^9}^E \frac{1}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot}} dE + 545 \quad (g + cm^{-2})$$

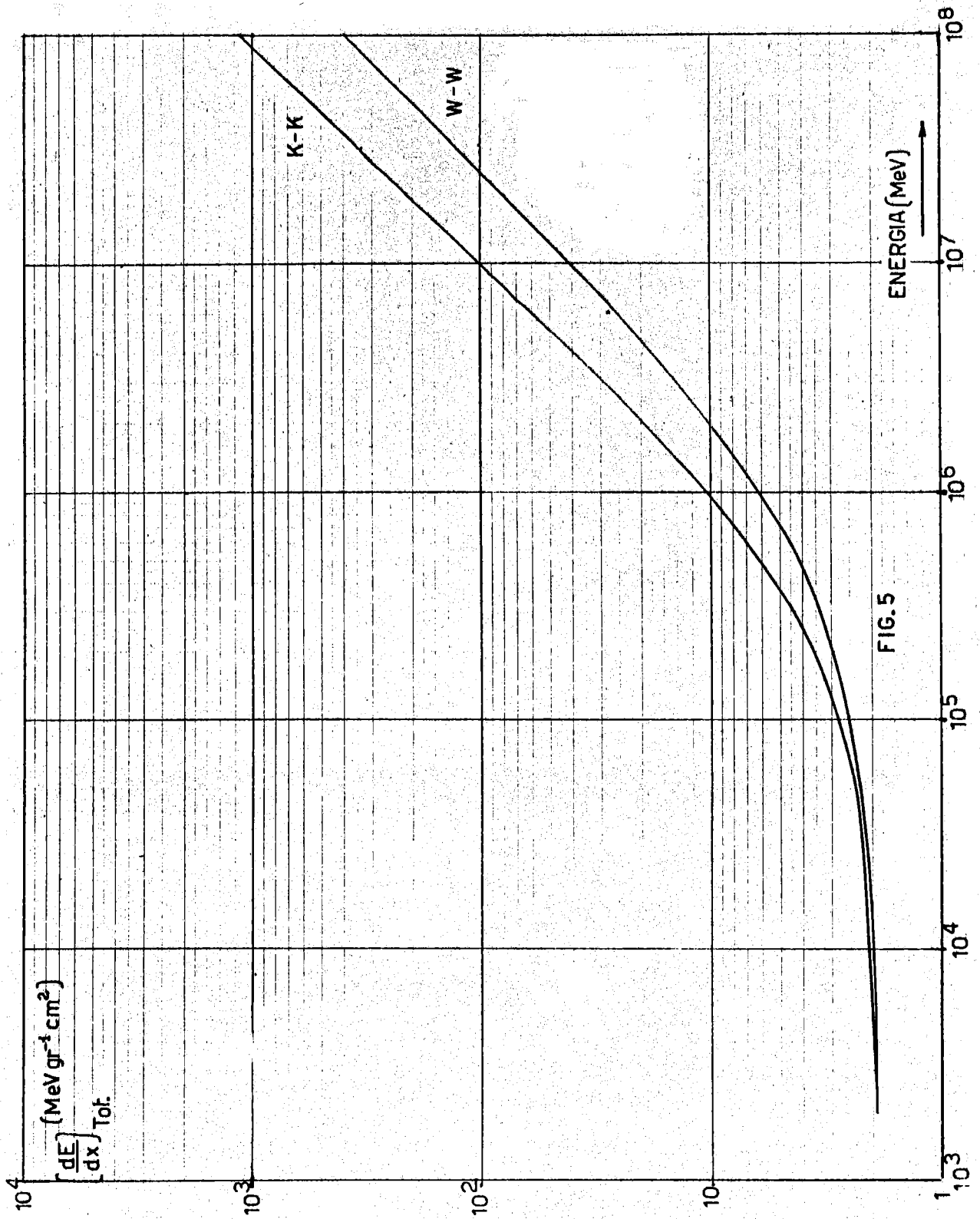
I risultati sono riportati in fig. 6, dove sono distinti i due casi considerati per la $(dE/dx)_{tot}$, per $Z = 12$.

In fig. 7, sono riportati i risultati ottenuti da noi e quelli ottenuti da Hayman e da Ozaki. Da tale confronto si notano differenze sensibili per la curva ottenuta con la teoria di K-K.

I programmi di calcolo inerenti al presente lavoro sono archiviati presso l'Ufficio Calcoli Numerici dei Laboratori Nazionali di Frascati, a disposizione di chi volesse usarli.

RINGRAZIAMENTI.

Ringraziamo i Proff. C. Castagnoli e A. Turrin per gli utili suggerimenti e consigli e il Prof. M. Ageno per averci messo a disposizione il calcolatore IBM 7040 per l'esecuzione dei calcoli.



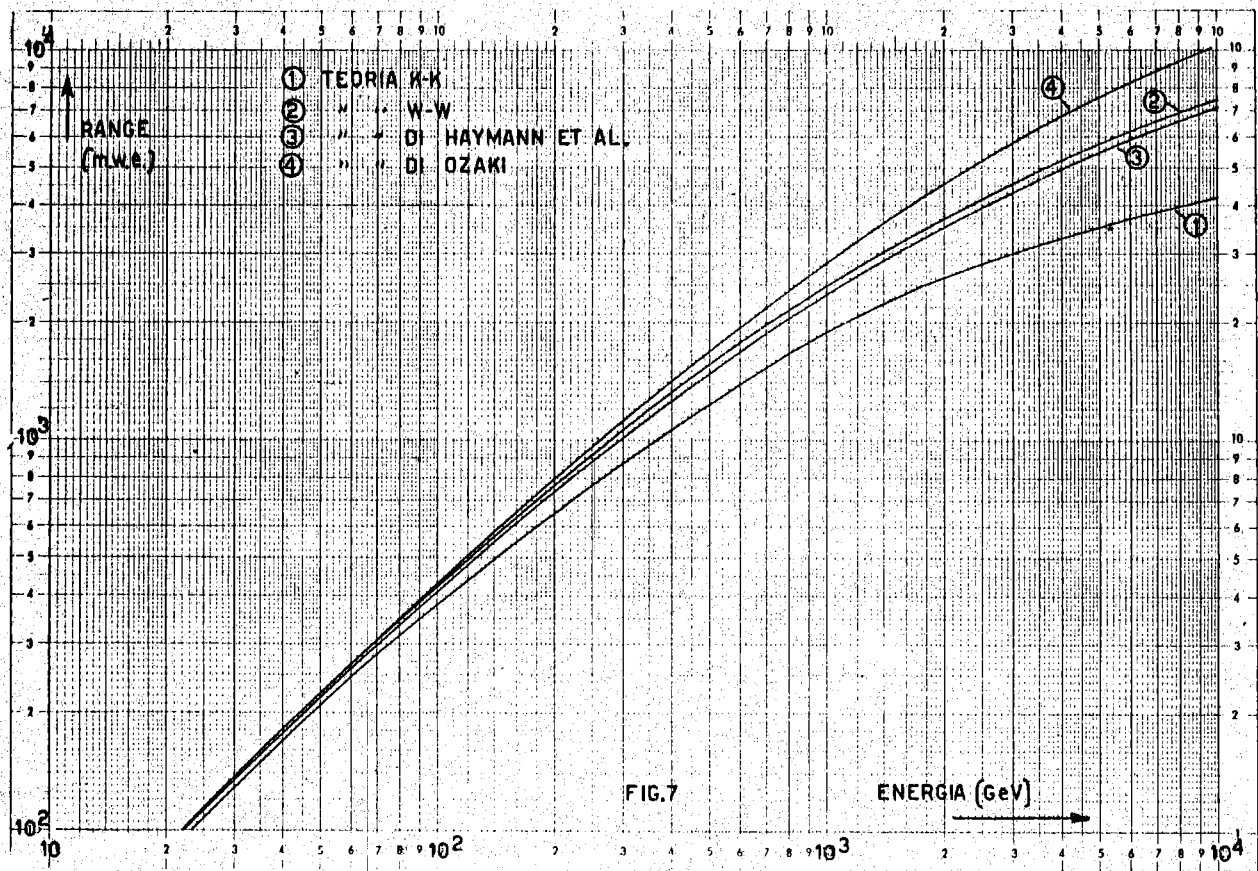
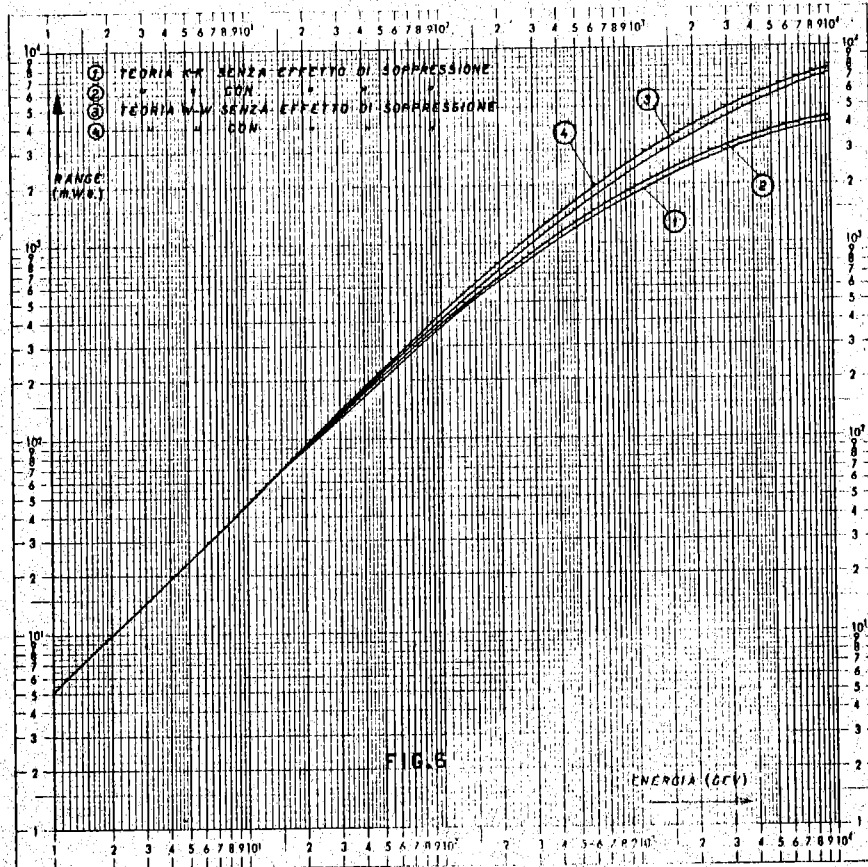


TABELLA I

		Z_2				
$\Delta (Z^2/A)$		6.56	10	11	12	13
$Z_1 =$	11	-0.404	-0.09	0	0.09	0.18
	6.56	0	0.52	0.67	0.83	0.98
	10	-0.349	0	0.1	0.2	0.3
	12	-0.452	-0.17	-0.09	0	0.083
	13	-0.504	-0.23	-0.15	-0.075	0

Variazione di Z^2/A quando si passa da Z_1 a Z_2 .

TABELLA II

 $z_1 = 13 (2^\circ) (W-W)$

		E (MeV)				
$\% \Delta \left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot}$		10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
-0.504	-3.26×10^{-3}	-3.75×10^{-2}	-1.61×10^{-1}	-2.44×10^{-1}	-2.60×10^{-1}	
-0.23	-1.48×10^{-3}	-1.70×10^{-2}	-7.36×10^{-2}	-1.55×10^{-1}	-1.85×10^{-1}	
-0.15	-9.70×10^{-4}	-1.11×10^{-2}	-4.80×10^{-2}	-7.25×10^{-2}	-7.78×10^{-2}	
-0.075	-4.84×10^{-4}	-5.55×10^{-3}	-2.40×10^{-2}	-3.62×10^{-2}	-3.81×10^{-2}	
0	0	0	0	0	0	

TABELLA III

 $z_1 = 13 (1^\circ) (K-K)$

		E (MeV)				
$\% \Delta \left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot}$		10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
-0.504	-6.30×10^{-3}	-8.10×10^{-2}	-3.00×10^{-1}	-3.95×10^{-1}	-4.16×10^{-1}	
-0.23	-2.87×10^{-3}	-3.68×10^{-2}	-1.37×10^{-1}	-1.795×10^{-1}	-1.90×10^{-1}	
-0.15	-1.87×10^{-3}	-2.40×10^{-2}	-8.93×10^{-2}	-1.17×10^{-1}	-1.24×10^{-1}	
-0.075	-9.39×10^{-4}	-1.20×10^{-2}	-4.46×10^{-2}	-5.85×10^{-2}	-6.20×10^{-2}	
0	0	0	0	0	0	

Fattori correttivi per cui occorre moltiplicare i valori qui ottenuti per il caso $Z=13$, o con la teoria di W-W o quella di K-K, quando si passi agli altri valori di Z .

Dalla Tab. I, si ricava il valore di $\Delta (Z^2/A)$, variazione di Z^2/A tra il caso da noi considerato ed il caso generico. Con questo valore si cerca nella Tab. II (o nella Tab. III) il fattore corrispondente che fornisce in funzione della energia, la differenza della $(dE/dx)_{tot}$.

BIBLIOGRAFIA.

- (1) - C. Castagnoli, A. De Marco e A. Longhetto, in stampa.
- (2) - H.A. Bethe and R. Livingston, Revs. Modern Phys. 9, 245, (1957).
- (3) - R.M. Sternheimer, Phy. Rev. 91, 256 (1959).
- (4) - G.B. Zhdanov et al., Soviet Phys. Jept. 16, 245 (1963).
- (5) - F. Ashton and M. Simpson, Jaipur Conference on Cosmic rays (1963).
- (6) - E. Crispin and P.J. Hayman, Jaipur Conference on Cosmic rays (1963).
- (7) - R.F. Christy and S. Kusaka, Phys. Rev. 59, 414, (1951).
- (8) - H.J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. A 152 559, (1935).
- (9) - M.M. Block, D.T. King and W.W. Wada; Phys. Rev. 96, 1627, (1954).
- (10) - G. Racah, Nuovo Cimento, 14, 93, (1937).
- (11) - T. Murota, A. Ueda and H. Tanaka, Progr. Theoret. Phys. 16, 483, (1956).
- (12) - F.V. Weicsacker, Z. Physik, 88, 612, (1934);
E.J. Williams, Proc. Roy. Soc. 125, 420, (1929).
- (13) - P. Kessler and D. Kessler, Nuovo Cimento, 4, 601, (1956).
- (14) - C. Castagnoli, M. Muchinik, G. Ghigo and R. Rinzivillo, Nuovo Cimento 16, 683, (1960).
- (15) - D. Kessler and R. Maze, Nuovo Cimento. 5, 1540, (1957).
- (16) - S. Higashi et al. Jaipur Conference on cosmic rays (1963).